Corrigé

Partie I : Mise en jambes

1. $E\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)+2=E\left(\frac{9}{4}\right)+2=4$ est bien le carré d'un nombre entier.

En revanche, $E\left(\left(\frac{3}{2}\right)^4\right)+2=E\left(\frac{81}{16}\right)+2=7$ n'est pas le carré d'un entier.

Il existe un entier n, en l'occurrence l'entier 2, tel que $E\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2^n}\right)+2$ n'est pas le carré d'un nombre entier :

Le nombre $\frac{3}{2}$ n'est pas pétillant.

2. Soit x un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;1[$. Son carré appartient aussi à l'intervalle $[0\,;1[$ et la partie entière de son carré est égale à 0. Pour un tel nombre réel, $E(x^2)+2=2$, nombre qui n'est pas le carré d'un nombre entier.

Il existe un entier n, en l'occurrence l'entier 1, tel que $E\left(x^{2^n}\right)+2$ n'est pas le carré d'un nombre entier : x n'est pas pétillant.

Aucun nombre appartenant à l'intervalle $[0\,;1[$ n'est pétillant.

Remarquons au passage que 1 n'est pas pétillant non plus car $E\left(1^{2^n}\right)+2=3$ qui n'est pas un carré.

3.a. Soit x un nombre réel pétillant.

Pour tout entier $n\geq 2$, le nombre $E\left(x^{2^n}\right)+2$ est par hypothèse le carré d'un nombre entier. Or, pour tout entier $n\geq 2$, $x^{2^n}=\left(x^2\right)^{2^{n-1}}$. Ainsi, pour tout entier $n\geq 2$, le nombre $n-1$ est un entier supérieur ou égal à 1 et le nombre $E\left(\left(x^2\right)^{2^{n-1}}\right)+2$ est le carré d'un nombre entier, ce qui montre que x^2 est pétillant.

Si x est pétillant, alors le carré de x est lui aussi pétillant.

3.b. Par récurrence évidente, le **3.a** montre que si x est pétillant, alors pour tout entier positif k le nombre x^{2^k} est lui aussi pétillant.

Or, s'il existe un réel pétillant, ce réel est nécessairement plus grand que 1 et la suite $\left(x^{2^k}\right)$ est une suite strictement croissante : tous ses termes sont distincts et ils sont tous pétillants.

S'il existe un nombre réel pétillant, il y en a une infinité.

4. De façon générale, remarquons que, si un entier est pair (de la forme $2m$), alors son carré, qui est égal à $4m^2$, est un entier multiple de 4 et si un entier est impair (de la forme $2m+1$), alors son carré, qui est égal à $4m^2+4m+1$, est un entier multiple de 4 augmenté de 1. Autrement dit, le reste de la division euclidienne par 4 d'un carré est égal ou bien à 0 ou bien à 1.

Soit maintenant x un nombre entier positif.

- Si x est un entier pair, le nombre $E(x^2)+2$ est un multiple de 4 augmenté de 2 : ce n'est pas le carré d'un nombre entier.
- Si x est un entier impair, Le nombre $E(x^2)+2$ est un multiple de 4 augmenté de 3 : ce n'est pas non plus le carré d'un nombre entier.

Quelle que soit la parité de l'entier x, il existe un entier n, en l'occurrence l'entier 1, tel que $E\left(x^{2^n}\right)+2$ n'est pas le carré d'un nombre entier :

Aucun nombre entier n'est pétillant.

Partie II : Existence

5. En préalable, notons que la fonction $x \mapsto f(x)=(x-1)^2$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[3\,;+\infty[$. L'image par f de cet intervalle est l'intervalle $[4\,;+\infty[$ qui est inclus dans $[3\,;+\infty[$. Ainsi, l'intervalle $[3\,;+\infty[$ est « stable » par f, il contient les images par f de tous ses éléments.

L'entier $k \geq 1$ étant fixé, considérons maintenant la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ qui lui est associée. Montrons par récurrence que tous ses termes appartiennent à $[3\,;+\infty[$.

- *Initialisation* : Son premier terme $u_1=(k+1)^2$ est au moins égal à 4, donc $u_1 \in [3\,;+\infty[$.
- *Hérédité* : La stabilité par la fonction f de l'intervalle $[3\,;+\infty[$ assure que, pour tout entier n : $u_n \in [3\,;+\infty[\Rightarrow f(u_n)=u_{n+1} \in [3\,;+\infty[$, l'appartenance à $[3\,;+\infty[$ est héréditaire.

Pour tout entier $n \geq 1$ **,** $u_n \geq 3$

6. Partons du principe que toute fonction puissance d'exposant entier strictement positif définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ est continue et strictement croissante sur cet intervalle. De plus, une telle fonction laisse invariant le nombre 1 et a pour limite plus l'infini en plus l'infini. De ce fait, la restriction d'une telle fonction à l'intervalle $[1\,;+\infty[$ est une bijection de cet intervalle sur lui-même. En particulier, pour tout entier n strictement positif fixé, il en est ainsi de la fonction puissance 2^n .

Or, puisque nous avons vérifié que pour tout entier n, $u_n \geq 3$, on sait que : $u_n - 1 > u_n - 2 \geq 1$.
Chacun des deux nombres $(u_n - 1)$ et $(u_n - 2)$ appartient à l'intervalle $[1\,;+\infty[$, ils en sont l'un et l'autre des valeurs intermédiaires. Chacun d'eux a dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$ un antécédent et un seul par la fonction puissance 2^n .

- **Il existe un réel unique $a_n \in [1\ ;\ +\infty[$ tel que $(a_n)^{2^n} = u_n - 2$**
- **Il existe un réel unique $b_n \in [1\ ;\ +\infty[$ tel que: $(b_n)^{2^n} = u_n - 1$**

En outre, remarquons que ces deux réels sont rangés dans le même ordre que leurs images par la fonction puissance 2^n : $b_n > a_n \geq 1$

7. Essayons d'exploiter des relations de récurrence entre deux termes consécutifs des suites (a_n) et (b_n). Plus précisément, un entier n strictement positif étant donné, nous allons essayer d'expliciter l'écart entre les puissances $\left(2^{n+1}\right)^{\text{èmes}}$ des termes de rang n et de rang $(n+1)$.

D'une part : $\begin{cases} u_{n+1} = (a_{n+1})^{2^{n+1}} + 2 \\ u_{n+1} = (u_n - 1)^2 = \left((a_n)^{2^n} + 1\right)^2 = (a_n)^{2^{n+1}} + 2(a_n)^{2^n} + 1 \end{cases}$

D'où on extrait la relation : $(a_{n+1})^{2^{n+1}} - (a_n)^{2^{n+1}} = 2(a_n)^{2^n} - 1$

Le fait que $a_n \geq 1$ implique que $2(a_n)^{2^n} - 1 \geq 1$: l'écart $(a_{n+1})^{2^{n+1}} - (a_n)^{2^{n+1}}$ est strictement positif, c'est-à-dire que $(a_{n+1})^{2^{n+1}} > (a_n)^{2^{n+1}}$

D'autre part : $\begin{cases} u_{n+1} = (b_{n+1})^{2^{n+1}} + 1 \\ u_{n+1} = (u_n - 1)^2 = \left((b_n)^{2^n}\right)^2 = (b_n)^{2^{n+1}} \end{cases}$

D'où on extrait la relation : $(b_{n+1})^{2^{n+1}} - (b_n)^{2^{n+1}} = -1$: l'écart $(b_{n+1})^{2^{n+1}} - (b_n)^{2^{n+1}}$ est strictement négatif, c'est-à-dire que $(b_{n+1})^{2^{n+1}} < (b_n)^{2^{n+1}}$

Du fait de la stricte croissance sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ de la fonction puissance $\left(2^{n+1}\right)^{\text{ème}}$, les nombres a_n et a_{n+1}, et de même les nombres b_n et b_{n+1}, sont rangés dans le même ordre que leurs puissances $\left(2^{n+1}\right)^{\text{èmes}}$.
Ainsi, quel que soit n strictement positif : $a_{n+1} > a_n$ et $b_{n+1} < b_n$

La suite $(a_n)_{n\geq1}$ est strictement croissante et la suite $(b_n)_{n\geq1}$ est strictement décroissante.

8. Les suites $(a_n)_{n\geq1}$ et $(b_n)_{n\geq1}$ sont toutes deux strictement monotones. La suite $(a_n)_{n\geq1}$ est majorée par n'importe quel terme de la suite (b_n), par exemple par $b_1 = \sqrt{k^2 + 2k}$, et la suite $(b_n)_{n\geq1}$ est minorée par n'importe quel terme de la suite (a_n), par exemple par $a_1 = \sqrt{k^2 + 2k - 1}$.
L'une étant croissante et majorée, l'autre étant décroissante et minorée :

Les deux suites $(a_n)_{n\geq1}$ et $(b_n)_{n\geq1}$ sont des suites convergentes.

9. Outre la monotonie de ces deux suites, nous avons vérifié que $b_n > a_n$ pour tout entier n.

Leurs limites respectives α et β vérifient les inégalités : $a_1 = \sqrt{k^2 + 2k - 1} < \alpha \leq \beta < b_1 = \sqrt{k^2 + 2k}$.

Or, pour tout entier strictement positif k : $k^2 + 2k - 1 > k^2$, donc $a_1 > k$, et $k^2 + 2k < k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$, donc $b_1 < k + 1$.

La limite α de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ vérifie la double inégalité : $k < \alpha < k + 1$.

En fait, on dispose de la triple inégalité : $k < \alpha \leq \beta < k + 1$

Montrons maintenant la « pétillance » de α.

Notons que, par construction, tous les termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ sont des entiers carrés parfaits.

Par définition des termes des suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$, pour tout entier $n \geq 1$: $(a_n)^{2^n} + 2 = u_n$ et $(b_n)^{2^n} + 2 = u_n + 1$, il s'agit là de deux entiers consécutifs dont le premier est un carré.

Pour tout entier $n \geq 1$: $(a_n)^{2^n} + 2 < \alpha^{(2^n)} + 2 < (b_n)^{2^n} + 2 = u_n + 1$.

Le nombre $\alpha^{(2^n)} + 2$ est situé strictement entre les deux entiers consécutifs u_n et $u_n + 1$, par conséquent sa partie entière n'est autre que le nombre u_n qui est un carré.

Pour tout entier $n \geq 1$, $E\left(\alpha^{(2^n)} + 2\right)$ est le carré d'un entier, le nombre α est pétillant.

Partie III : Unicité

10. En préalable à cette question, remarquons que, si on considère les carrés de deux entiers strictement positifs consécutifs m et $m+1$, la différence de ces carrés est : $(m+1)^2 - m^2 = 2m + 1$, elle est supérieure ou égale à 3.

Soit k un entier strictement positif et γ un nombre réel pétillant tel que $k \leq \gamma < k + 1$.

Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$: $u_n = v_n$.

Initialisation : En ce qui concerne le rang 1, exploitons le fait que les carrés des nombres k ; γ ; $k+1$ sont rangés dans le même ordre qu'eux : $k^2 \leq \gamma^2 < (k+1)^2$. Par conséquent : $k^2 + 2 \leq v_1 = E(\gamma^2) + 2 < (k+1)^2 + 2$.

Or, en vertu de la remarque préalable à cette question, le seul nombre qui soit un carré parfait et qui est entre $k^2 + 2$ et $(k+1)^2 + 2$ est le carré $(k+1)^2$.

Nécessairement : $v_1 = (k+1)^2 = u_1$

Hérédité : Supposons établi que pour un certain entier $n \geq 1$: $u_n = v_n = E\left(\gamma^{2^n}\right) + 2$,

Selon cette hypothèse : $u_n - 2 \leq \gamma^{2^n} < u_n - 1$. En élevant au carré : $(u_n - 2)^2 \leq \gamma^{\left(2^{n+1}\right)} < (u_n - 1)^2$.

On dispose donc de l'inégalité : $(u_n - 2)^2 + 2 \leq \gamma^{\left(2^{n+1}\right)} + 2 < (u_n - 1)^2 + 2$

En vertu de la remarque préalable à cette question, le seul nombre qui soit un carré parfait et qui est situé entre $(u_n - 2)^2 + 2$ et $(u_n - 1)^2 + 2$ est le carré $(u_n - 1)^2$. Nécessairement : $v_{n+1} = (u_n - 1)^2 = u_{n+1}$

Si à un rang *n*, $u_n = v_n$, alors au rang suivant $u_{n+1} = v_{n+1}$, cette égalité est héréditaire.

L'égalité est établie pour tout entier $n \geq 1$: $u_n = E\left(\gamma^{\left(2^n\right)}\right) + 2$

11. Vu ce dernier résultat : $u_n - 2 \leq \gamma^{\left(2^n\right)} \leq u_n - 1$, c'est-à-dire que, compte tenu des définitions des nombres a_n et b_n : $(a_n)^{2^n} \leq \gamma^{\left(2^n\right)} \leq (b_n)^{2^n}$. Les antécédents de ces trois nombres par la fonction puissance 2^n sont classés dans le même ordre :

Pour tout entier $n \geq 1$: $a_n \leq \gamma \leq b_n$.

12.a. Soit *x* et *y* tels que $x \geq y \geq 1$; la différence $(x - y)$ est donc un réel positif.

Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$: $x^{\left(2^n\right)} - y^{\left(2^n\right)} \geq 2^n (x - y)$

Initialisation : En ce qui concerne le rang 1 : $x^2 - y^2 = (x + y) \times (x - y)$. Or, puisque $x \geq y \geq 1$, la somme $(x + y)$ est supérieure ou égale à 2 : $x^2 - y^2 \geq 2(x - y)$, l'inégalité est bien vérifiée lorsque $n = 1$.

Hérédité : Supposons établi que, pour un certain entier $n \geq 1$, $x^{\left(2^n\right)} - y^{\left(2^n\right)} \geq 2^n (x - y)$.

Au rang suivant : $x^{\left(2^{n+1}\right)} - y^{\left(2^{n+1}\right)} = \left(x^{\left(2^n\right)}\right)^2 - \left(y^{\left(2^n\right)}\right)^2 = \left(x^{\left(2^n\right)} + y^{\left(2^n\right)}\right) \times \left(x^{\left(2^n\right)} - y^{\left(2^n\right)}\right)$

Mais si $x \geq y \geq 1$, leurs puissances 2^n èmes vérifient des mêmes inégalités de même sens : $x^{\left(2^n\right)} + y^{\left(2^n\right)} \geq 2$ et, par suite : $x^{\left(2^{n+1}\right)} - y^{\left(2^{n+1}\right)} \geq 2 \times 2^n (x - y) = 2^{n+1}(x - y)$

Si $x^{\left(2^n\right)} - y^{\left(2^n\right)} \geq 2^n (x - y)$, alors $x^{\left(2^{n+1}\right)} - y^{\left(2^{n+1}\right)} \geq 2^{n+1}(x - y)$, l'inégalité est héréditaire.

L'inégalité $x^{\left(2^n\right)} - y^{\left(2^n\right)} \geq 2^n (x - y)$ est démontrée pour tout entier $n \geq 1$.

12.b. Compte tenu de l'inégalité $a_n \leq \gamma < b_n$ obtenue pour tout entier $n \geq 1$, en passant à la limite : $\alpha \leq \gamma \leq \beta$. Supposons que l'inégalité stricte $\alpha < \beta$ soit vérifiée. La différence $\beta - a$ est selon cette hypothèse supposée être un réel strictement positif.

Dans ce cas, pour tout entier $n \geq 1$: $(b_n)^{2^n} > \beta^{2^n} > \alpha^{2^n} > (a_n)^{2^n}$. Nous en déduirions que : $(b_n)^{2^n} - (a_n)^{2^n} > \beta^{2^n} - \alpha^{2^n} \geq 2^n(\beta - \alpha)$. Pour les entiers n suffisamment grands (ceux qui sont tels que $2^n > \dfrac{1}{\beta - \alpha}$), nous aurions l'inégalité stricte : $(b_n)^{2^n} - (a_n)^{2^n} > 1$, ce qui serait en contradiction avec le fait que, par leur définition, $(a_n)^{2^n}$ et $(b_n)^{2^n}$ sont deux entiers consécutifs. L'hypothèse est à rejeter.

Nécessairement : $\alpha = \gamma = \beta$, les suites $(a_n)^{2^n}$ et $(b_n)^{2^n}$ convergent vers γ.

13. La question **12** caractérise un nombre pétillant de l'intervalle $[k\,;\,k+1[$ comme étant par nécessité la limite commune des suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$.Par unicité de la limite d'une suite, cette propriété caractérise bien un unique nombre.

Illustration : valeurs approchées de nombres pétillants

Le programme « **bulle** », rédigé sur TI-Nspire, calcule, pour une valeur k fixée, les termes successifs des suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$. Il est arrêté lorsque le logiciel n'arrive plus à distinguer la différence entre le terme a_n et le terme b_n, chose qui se produit assez rapidement.

Ce programme permet d'obtenir une valeur approchée du nombre pétillant situé entre k et $k+1$.

Ainsi par exemple, 1,678459 et 2,817224 sont des valeurs approchées à 10^{-6} près des nombres pétillants situés entre 1 et 2 puis entre 2 et 3.

$bulle(1)$

$\{1.41421356237, 1.73205080757\}$

$\{1.6265765617, 1.68179283051\}$

$\{1.67513171521, 1.67848540275\}$

$\{1.67843252791, 1.67845896846\}$

$\{1.67845896179, 1.67845896513\}$

$\{1.67845896513, 1.67845896513\}$

Terminé

$bulle(2)$

$\{2.64575131106, 2.82842712475\}$

$\{2.8060662633, 2.81731324726\}$

$\{2.81713575075, 2.81722450879\}$

$\{2.81722448643, 2.81722449761\}$

$\{2.81722449761, 2.81722449761\}$

Terminé

bulle 8/12

Define **bulle**(k)=

Prgm

Local u,a,b,n

Define $u=(k+1)^2$

Define $a=\sqrt{u-2}$

Define $b=\sqrt{u-1}$

Define $n=0$

While $a \neq b$

$n+1 \rightarrow n$

$\sqrt[2^n]{u-2} \rightarrow a$

$\sqrt[2^n]{u-1} \rightarrow b$

$(u-1)^2 \rightarrow u$

Disp $\{a,b\}$

EndWhile

EndPrgm